MATH 1241 : Mathématiques discrètes

Chapitre 1 : La logique mathématiques

Les équivalences logiques

Équivalence	Nom
$p \wedge V \Leftrightarrow p$ $p \vee F \Leftrightarrow p$	Identité
$p \vee V \Leftrightarrow V$ $p \wedge F \Leftrightarrow F$	Domination
$p \vee p \Leftrightarrow p$ $p \wedge p \Leftrightarrow p$	Idempotence
$p \vee \neg p \Leftrightarrow V$ $p \wedge \neg p \Leftrightarrow F$	Loi des négations
$\neg(\neg p) \Leftrightarrow p$	Double négation
$p \vee q \Leftrightarrow q \vee p$ $p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p$	Commutativité
$p \vee (q \vee r) \Leftrightarrow (p \vee q) \vee r$ $p \wedge (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \wedge r$	Associativité
$p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$ $p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$	Distributivité
$\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q$ $\neg(p \vee q) \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$	Loi de De Morgan
$p \to q \Leftrightarrow \neg p \vee q$ $p \to q \Leftrightarrow \neg q \to \neg p$	Équivalence avec le connecteur d'implication
$p \leftrightarrow q \Leftrightarrow (p \to q) \wedge (q \to p)$ $p \leftrightarrow q \Leftrightarrow \neg p \leftrightarrow \neg q$	Équivalence avec le connecteur d'équivalence

Lois de De Morgan pour les quantificateurs

Si $P(x)$ est un prédicat, alors on a les deux équivalences suivantes :

$$\neg \exists x, P(x) \Leftrightarrow \forall x, \neg P(x)$$

$$\neg \forall x, P(x) \Leftrightarrow \exists x, \neg P(x)$$

Les connecteurs logiques

p	$\neg p$
V	F
F	V

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \to q$	$p \leftrightarrow q$
V	V	V	V	V	V
V	F	F	V	F	F
F	V	F	V	V	F
F	F	F	F	V	V

Les règles d'inférence

Nom	Règle d'inférence	Tautologie associé
Modus ponens	$\begin{array}{rl} & p \\ & p \to q \\ \hline \therefore & q \end{array}$	$(p \wedge (p \to q)) \to q$
Modus tollens	$\begin{array}{rl} & \neg q \\ & p \to q \\ \hline \therefore & \neg p \end{array}$	$(\neg q \wedge (p \to q)) \to \neg p$
Syllogisme hypothétique	$\begin{array}{rl} & p \to q \\ & q \to r \\ \hline \therefore & p \to r \end{array}$	$((p \to q) \wedge (q \to r)) \to (p \to r)$
Syllogisme disjontif	$\begin{array}{rl} & p \vee q \\ & \neg p \\ \hline \therefore & q \end{array}$	$((p \vee q) \wedge (\neg p)) \to q$
Addition	$\begin{array}{rl} & p \\ \hline \therefore & p \vee q \end{array}$	$p \to (p \vee q)$
Simplification	$\begin{array}{rl} & p \wedge q \\ \hline \therefore & p \end{array}$	$(p \wedge q) \to p$
Conjonction	$\begin{array}{rl} & p \\ & q \\ \hline \therefore & p \wedge q \end{array}$	$(p \wedge q) \to (p \wedge q)$
Résolution	$\begin{array}{rl} & p \vee q \\ & \neg p \vee r \\ \hline \therefore & q \vee r \end{array}$	$((p \vee q) \wedge (\neg p \vee r)) \to (q \vee r)$

Nicolas Bouffard
31 août 2019